PENURUNAN INTEGRASI KAIDAH BOOLE DAN APLIKASINYA UNTUK MENYELESAIKAN INTEGRAL TENTU MENGGUNAKAN PROGRAM PASCAL

Muhammad Win Afgani

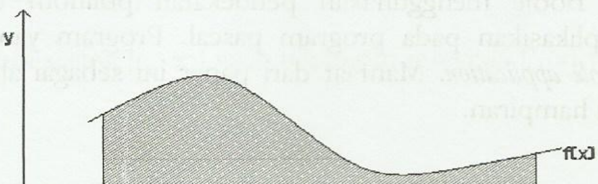
Dosen Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Raden Fatah Palembang

Abstract : *The aim of this paper is to derivate Boole rule integration using the 4^{th} order of Newton-Gregory Polynomial and Richardson extrapolation. The form of formula is applied in pascal programming to find the solution of definite integral toward continue function and function that is tabulated.*

Key words : *boole rule, pascal programming*

PENDAHULUAN

Persoalan integrasi numerik ialah menghitung secara numerik integral tentu I = $\int_a^b f(x)dx$ yang dalam hal ini a dan b batas-batas integrasi. f adalah fungsi yang dapat diberikan secara eksplisit dalam bentuk persamaan ataupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai. Secara geometris, integrasi tentu sama dengan luas daerah yang dibatasi kurva y = f(x), garis x = a dan garis x = b (Gambar 1). Daerah yang dimaksud ditunjukkan oleh bagian yang diarsir.



Gambar 1. Geometri Integral Tentu

Fungsi-fungsi yang dapat diintegrasikan dapat dikelompok sebagai :

1. Fungsi kontinu yang sederhana, seperti polinomial, eksponensial, atau fungsi trigonometri. Misalnya,

$$\int_0^2 (6x^3 - x^2 + \cos x - e^x)dx$$

Fungsi sederhana seperti ini mudah dihitung integralnya secara eksak dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus, yaitu jika fungsi f kontinu pada [a, b] dan fungsi F adalah suatu anti turunan dari f pada [a, b], maka $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a).

2. Fungsi kontinu yang rumit, misalnya

$$\int_0^2 \frac{2+\cos(1+x^{1,5})}{\sqrt{1+0,5\sin x}} e^{0,5x} dx$$

Fungsi yang rumit seperti ini sulit, bahkan tidak mungkin diselesaikan dengan metode-metode integrasi yang sederhana. Karena itu, solusinya hanya dapat dihitung dengan integrasi numerik.

3. Fungsi yang ditabulasikan, yang dalam hal ini nilai x dan f(x) diberikan dalam sejumlah titik diskrit. Fungsi seperti ini sering dijumpai pada data hasil eksperimen di laboratorium atau berupa data pengamatan di lapangan. Pada kasus terakhir ini, umumnya fungsi f(x) tidak diketahui secara eksplisit yang dapat diukur hanyalah besaran fisisnya saja. Misalnya,

x	f(x)
0,00	6,0
0,25	7,5
0,50	8,0
0,75	9,0
1,00	8,5

Integrasi fungsi seperti ini jelas harus dikerjakan secara numerik.

Penurunan rumus integrasi numerik dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan polinom interpolasi. Di sini fungsi integrand f(x) dihampiri dengan polinom interpolasi $P_n(x)$.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx$$

yang dalam hal ini,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $P_n(x)$ karena polinom lebih mudah diintegralkan daripada mengintegralkan f(x). Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam metode Newton-Cotes. Salah satunya adalah kaidah Boole yang dapat diturunkan menggunakan polinom Newton-Gregory maju derajat 4 ataupun menggunakan ekstrapolasi Richardson. Berdasarkan latar belakang di atas, maka paper ini akan membahas penurunan kaidah Boole menggunakan pendekatan polinom dan ekstrapolasi Richardson sehingga dapat diaplikasikan pada program pascal. Program yang digunakan terdapat dalam Delphi berupa *console application.* Manfaat dari paper ini sebagai alternatif dalam menyelesaikan integral tentu secara hampiran.

PENURUNAN INTEGRASI KAIDAH BOOLE MENGGUNAKAN POLINOM NEWTON-GREGORY

Polinom Newton-Gregory merupakan kasus khusus dari polinom Newton untuk titik-titik absis yang berjarak sama. Polinom Newton untuk data berjarak sama dapat ditulis sebagai :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \dots +$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

dimana

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f_0}{1!h}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_2, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

jika titik-titik berjarak sama dinyatakan sebagai

$x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$

dan nilai x yang diinterpolasikan adalah

$x = x_0 + sh,\ s \in R$

maka, polinom Newton dapat ditulis dalam parameter s sebagai

$$P_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

Persamaan ini dinamakan polinom Newton-Gregory maju.

Misalkan fungsi f(x) dihampiri dengan polinom Newton-Gregory derajat 4 yang melalui titik-titik (0, f(0)), (h, f(h)), (2h, f(2h)), (3h, f(3h)), dan (4h, f(4h)). Bentuk polinom yang melalui kelima titik tersebut adalah :

$$P_4(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

$$P_4(x) = f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{6h^3}\Delta^3 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)(x-3h)}{24h^4}\Delta^4 f_0$$

$$P_4(x) = f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^2}{2h^2} - \frac{x}{2h}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^3} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x}{3h}\right)\Delta^3 f_0$$

$$+ \left(\frac{x^4}{24h^4} - \frac{x^3}{4h^3} + \frac{11x^2}{24h^2} - \frac{x}{4h}\right)\Delta^4 f_0$$

Bentuk integrasi f(x) di dalam selang $[x_0, x_4]$ yang dihampiri integrasi $P_4(x)$ yakni sebagai berikut :

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \int_0^{4h} P_4(x)dx$$

$$\approx \int_0^{4h} (f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^2}{2h^2} - \frac{x}{2h}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^3} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x}{3h}\right)\Delta^3 f_0$$

$$+ \left(\frac{x^4}{24h^4} - \frac{x^3}{4h^3} + \frac{11x^2}{24h^2} - \frac{x}{4h}\right)\Delta^4 f_0)\ dx$$

$$\approx \Bigg[xf_0 + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{x^4}{24h^3} - \frac{x^3}{6h^2} + \frac{x^2}{6h}\right)\Delta^3 f_0$$

$$+ \left(\frac{x^5}{120h^4} - \frac{x^4}{16h^3} + \frac{11x^3}{72h^2} - \frac{x^2}{8h}\right)\Delta^4 f_0 \Bigg]_0^{4h}$$

$$\approx 4hf_0 + 8h\Delta f_0 + \left(\frac{32h}{3} - 4h\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{32h}{3} - \frac{32h}{3} + \frac{8h}{3}\right)\Delta^3 f_0$$

$$+ \left(\frac{128h}{15} - 16h + \frac{88h}{9} - 2h\right)\Delta^4 f_0$$

$$\approx 4hf_0 + 8h\Delta f_0 + \frac{20h}{3}\Delta^2 f_0 + \frac{8h}{3}\Delta^3 f_0 + \frac{14h}{45}\Delta^4 f_0$$

$$\approx \frac{2h}{45}(90f_0 + 180\Delta f_0 + 150\Delta^2 f_0 + 60\Delta^3 f_0 + 7\Delta^4 f_0)$$

Karena

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$$
$$= f_2 - f_1 - (f_1 - f_0)$$
$$= f_2 - 2f_1 + f_0$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$
$$= f_3 - 2f_2 + f_1 - (f_2 - 2f_1 + f_0)$$
$$= f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

$$\Delta^4 f_0 = \Delta^3 f_1 - \Delta^3 f_0$$
$$= f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1 - (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$$
$$= f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$$

maka

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(90f_0 + 180(f_1 - f_0) + 150(f_2 - 2f_1 + f_0) + 60(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$$
$$+ 7(f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0))$$
$$\approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

Jadi, hampiran integrasi f(x) di dalam selang $[x_0, x_n]$ adalah :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_8} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-4}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) + \frac{2h}{45}(7f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 7f_8)$$
$$+ \ldots + \frac{2h}{45}(7f_{n-4} + 32f_{n-3} + 12f_{n-2} + 32f_{n-1} + 7f_n)$$
$$\approx \frac{2h}{45}\left(7f_0 + 32\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f_i + 12\sum_{i=2,6,10,\ldots}^{n-2} f_i + 14\sum_{i=4,8,12,\ldots}^{n-4} f_i + 7f_n\right)$$

Persamaan ini dinamakan kaidah Boole. Namun, penggunaan kaidah ini mensyaratkan jumlah upselang (n) harus kelipatan 4.

PENURUNAN INTEGRASI KAIDAH BOOLE MENGGUNAKAN EKSTRAPOLASI RICHARDSON

Pandang kembali kaidah Simpson $^1/_3$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5,...}^{n-1} f_i + 2\sum_{j=2,4,6,...}^{n-2} f_j + f_n \right) - \frac{(x_n - x_0)f^{iv}(t)}{180}h^4$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^4$$

dengan I(h) adalah integrasi menggunakan kaidah Simpson $^1/_3$ dengan jarak antar titik selebar h

dan $\mathrm{C} = -\dfrac{(x_n - x_0)f^{iv}(t)}{180}h^4$

secara umum, kaidah integrasi yang lain dapat ditulis sebagai

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^q$$

dengan C dan q adalah konstanta yang tidak bergantung pada h. Nilai q dapat ditentukan langsung dari orde galat kaidah integrasi.

Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik dibandingkan dengan I. Misalkan J adalah nilai integrasi yang lebih baik daripada I dengan jarak antar titik adalah h :

$\mathrm{J} = \mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^q$

Ekstrapolasikan h menjadi 2h

$\mathrm{J} = \mathrm{I(2h)} + \mathrm{C(2h)}^q$

Sehingga

$\mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^q = \mathrm{I(2h)} + \mathrm{C(2h)}^q$

$$\mathrm{C} = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)h^q}$$

$$\mathrm{J} = \mathrm{I(h)} + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

Persamaan ini dinamakan ekstrapolasi Richardson.

Jika I(h) dan I(2h) dihitung dengan kaidah Simpson $^1/_3$, maka ekstrapolasi Richardson-nya adalah :

$\mathrm{J} = \mathrm{I(h)} + {}^1/_{15}[\mathrm{I(h)} - \mathrm{I(2h)}]$

$\mathrm{I(h)} = {}^h/_3(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)$

$\mathrm{I(2h)} = {}^{(2h)}/_3(f_0 + 4f_2 + f_4)$

$\mathrm{J} = {}^h/_3(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) + {}^1/_{15}[{}^h/_3(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) - {}^{2h}/_3(f_0 + 4f_2 + f_4)]$

$J = {}^{h}/_{3}f_0 + {}^{4h}/_{3}f_1 + {}^{2h}/_{3}f_2 + {}^{4h}/_{3}f_3 + {}^{h}/_{3}f_4 - {}^{h}/_{45}f_0 + {}^{4h}/_{45}f_1 - {}^{6h}/_{45}f_2 + {}^{4h}/_{45}f_3 - {}^{h}/_{45}f_4$

$J = {}^{14h}/_{45}f_0 + {}^{64h}/_{45}f_1 + {}^{24h}/_{45}f_2 + {}^{64h}/_{45}f_3 + {}^{14h}/_{45}f_4$

$J = {}^{2h}/_{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$

Misalkan kurva fungsi sepanjang selang integrasi [a, b] dibagi menjadi n+1 titik diskrit $x_0, x_1, ..., x_n$ dengan n kelipatan 4, maka jumlah seluruh integral tersebut membentuk:

$$I_{total} = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_8} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-4}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx {}^{2h}/_{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) + {}^{2h}/_{45}(7f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 7f_8) + ... + {}^{2h}/_{45}(7f_{n-4} + 32f_{n-3} + 12f_{n-2} + 32f_{n-1} + 7f_n)$$

$$\approx \frac{2h}{45}\left(7f_0 + 32\sum_{i=1,3,5,...}^{n-1} f_i + 12\sum_{i=2,6,10,...}^{n-2} f_i + 14\sum_{i=4,8,12,...}^{n-4} f_i + 7f_n\right)$$

APLIKASI INTEGRASI KAIDAH BOOLE DALAM PROGRAM PASCAL

Kasus 1 : Integrasi pada fungsi kontinu

Definisi :

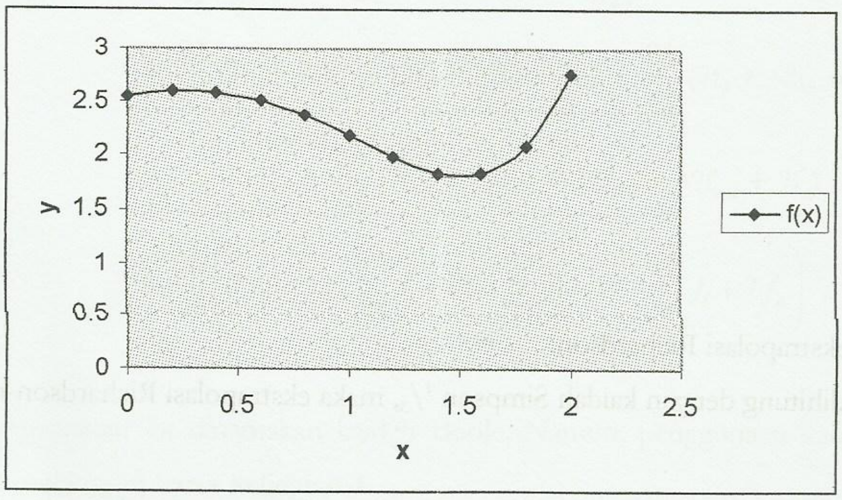
i) Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terbuka (a, b), jika fungsi f kontinu di setiap titik pada (a, b).

ii) Fungsi f dikatakan kontinu pada selang tertutup [a, b], jika fungsi f kontinu pada selang terbuka (a, b), kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Teorema :

Jika fungsi f kontinu pada [a, b], maka fungsi f terbatas pada [a, b].

Misalkan diberikan permasalahan untuk menghitung $\int_0^2 f(x)dx$, dimana f(x) = $\frac{2+\cos(1+x^{1,5})}{\sqrt{1+0,5\sin x}}e^{0,5x}$. Secara geometris, f(x) kontinu pada selang [0, 2].



Gambar 2. Kurva f(x)

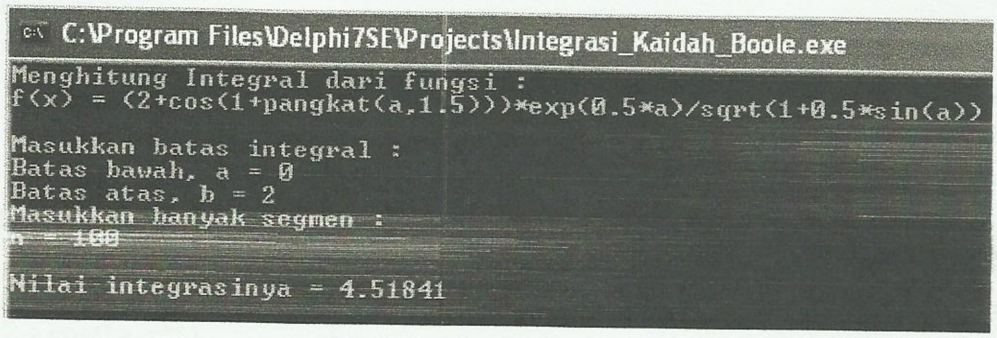
Hampiran integrasi f(x) menggunakan kaidah Boole pada program pascal adalah sebagai berikut :

a. Program

```
program Integrasi_Kaidah_Boole_pada_fungsi_kontinu;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
function pangkat(x,y:real):real;
begin
  if x=0 then
    begin
    pangkat := 0;
    end
  else
  pangkat := exp(ln(x)*y);
end;
var
  a,b,fa,fb,h,x,fx,sigma,I:real;
  r,n:integer;
begin
  writeln('Menghitung Integral dari fungsi :');
  writeln('f(x) = (2+cos(1+pangkat(a,1.5)))*exp(0.5*a)/sqrt(1+0.5*sin(a))');
  writeln;
  writeln('Masukkan batas integral :');
  write('Batas bawah, a = ');readln(a);
  write('Batas atas, b = ');readln(b);
  writeln('Masukkan banyak segmen :');
  write('n = ');readln(n);
  writeln;
   fa := (2+cos(1+pangkat(a,1.5)))*exp(0.5*a)/sqrt(1+0.5*sin(a));
   fb := (2+cos(1+pangkat(b,1.5)))*exp(0.5*b)/sqrt(1+0.5*sin(b));
   h := (b-a)/n;
   x := a;
   I := 7*fa+7*fb;
   sigma := 0;
    for r:=1 to n-1 do
    begin
```

```
   x := x+h;
   fx := (2 + cos(1+pangkat(x,1.5)))*exp(0.5*x)/sqrt(1+0.5*sin(x));
   if r mod 2 = 1 then
    sigma := sigma + 32*fx
   else if r mod 4 = 0 then
    sigma := sigma + 14*fx
   else
    sigma := sigma + 12*fx;
   end;
 I := ((2*h)/45)*(I+sigma);
 writeln('Nilai integrasinya = ',I:1:5);
 readln;
end.
```

b. Aplikasi



Gambar 3. Aplikasi Integral Pada Fungsi Kontinu.

Kasus 2 : Integrasi pada fungsi yang ditabulasi.

Misal diberikan nilai x dan f(x) dalam sejumlah titik diskrit sebagai berikut :

x	f(x)
0,00	6,0
0,25	7,5
0,50	8,0
0,75	9,0
1,00	8,5

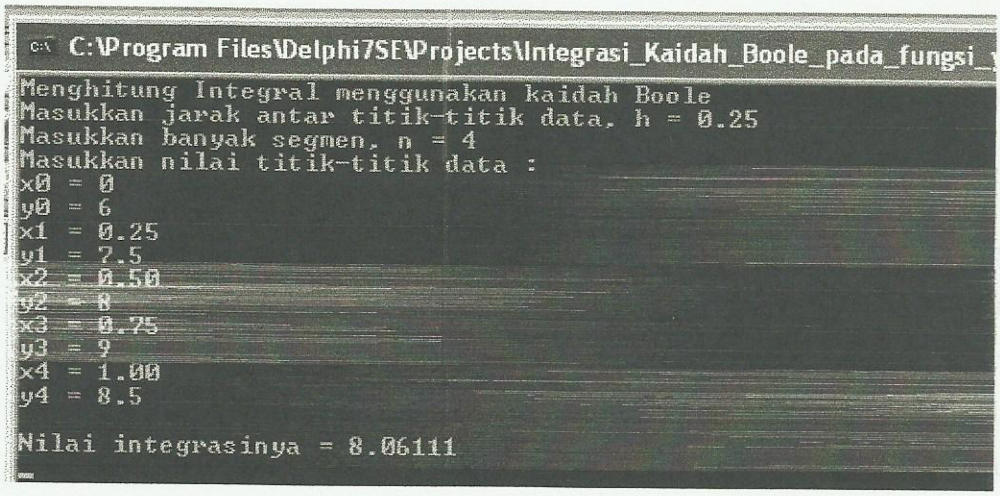
maka hampiran integrasi menggunakan kaidah Boole pada program pascal adalah :

a. Program

```
program Integrasi_Kaidah_Boole_pada_fungsi_yang_ditabulasi;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
 SysUtils;
```

```
var
  x,y:array[0..100]of real;
  h,sigma,I:real;
  r,n:integer;
begin
  writeln('Menghitung Integral menggunakan kaidah Boole');
  write('Masukkan jarak antar titik-titik data, h = '); readln(h);
  write('Masukkan banyak segmen, n = ');readln(n);
  writeln('Masukkan nilai titik-titik data :');
  write('x0 = ');readln(x[0]);
  write('y0 = ');readln(y[0]);
  for r:=1 to n-1 do
   Begin
     writeln('x',r,' = ',x[0]+r*h:1:2);
     write('y',r,' = ');readln(y[r]);
   end;
  writeln('x',n,' = ',x[0]+n*h:1:2);
  write('y',n,' = ');readln(y[n]);
  writeln;
  I := 7*y[0]+7*y[n];
  sigma := 0;
   for r:=1 to n-1 do
   begin
   if r mod 2 = 1 then
     sigma := sigma + 32*y[r]
   else if r mod 4 = 0 then
     sigma := sigma + 14*y[r]
   else
     sigma := sigma + 12*y[r]
   end;
  I := ((2*h)/45)*(I+sigma);
  writeln('Nilai integrasinya = ',I:1:5);
  readln;
 end.
```

b. Aplikasi



Gambar 4. Aplikasi Integral Pada Fungsi Yang Ditabulasi

KESIMPULAN

Integral tentu dapat dicari solusinya secara analitik ataupun numerik. Penyelesaian secara numerik dilakukan, jika secara analitik tidak dapat dilakukan. Salah satu alternatif untuk mencari solusi integral tentu secara numerik adalah menggunakan kaidah Boole. Integrasi kaidah Boole dapat diturunkan dari polinom Newton-Gregory derajat 4 atau dari ekstrapolasi Richardson. Kaidah ini dapat diaplikasikan pada bahasa pemrograman untuk mencari solusinya. Hasilnya bersifat hampiran dan mempunyai error. Errornya akan semakin kecil, jika banyak segmen yang diinput semakin besar, tetapi pada paper ini error belum dapat ditampilkan karena perlu dianalisis lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Jogiyanto. 1999. *Teori dan Aplikasi Program Komputer Bahasa Turbo Pascal.* Yogyakarta : Andi Offset.

Martono, Koko. 1999. Kalkulus. Jakarta : Erlangga.

Munir, Rinaldi. 2006. Metode Numerik. Bandung : Informatika.

http://delphi.about.com